**Д-191. Математика\_ Векторы в пространстве.**

**Историческая справка**:

Впервые понятие вектора появилось в работах немецкого математика 19 века Г. Грассмана и ирландского математика У. Гамильтона; затем его использовали в своих открытиях многие ученые. Современная символика для обозначения вектора была введена в 1853 году французским математиком О. Коши. Применение векторов играет важнейшую роль в современной математике, химии, биологии, экономике и в других науках.

Вектором называется отрезок, у которого указано, какая точка является началом, а какая концом, т.е. вектор - это направленный отрезок.

1. Вектор характеризуется следующими элементами:
1) начальной точкой ;
2 )направлением;
3) длиной («модулем вектора»).

Если начало вектора — точка А, а его конец — точка В, то вектор обозначается  или .

  

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один, используя параллельный перенос.



**Нулевой вектор** — точка в пространстве. Начало и конец нулевого вектора совпадают, и он не имеет длины и направления. Обозначается:  или $\vec{ТТ}$.

**Абсолютной величиной** (или модулем) **вектора** называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора . Обозначается .

**Два ненулевых вектора** называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.
Если векторы  и  коллинеарны и их лучи сонаправлены, то **векторы**  и  **называются сонаправленными**.  Обозначаются .
Если векторы  и  коллинеарны, а их лучи не являются сонаправленными, то **векторы**  и  **называются противоположно направленными**.
Обозначаются . **Нулевой вектор условились считать сонаправленным с любым вектором.**

  

**Два вектора называются равными**, если они совмещаются параллельным переносом.

, если |AB|=|CD| и $\vec{AB}\uparrow \uparrow \vec{CD}$ 

**Свойство коллинеарных векторов.** Если векторы  и  коллинеарны и , то существует число *k* такое, что . причем если *k* > 0, то векторы  и  сонаправленные, если *k* < 0, то противоположно направленные.

**Сложение векторов**

**Правило треугольника**. Каковы бы ни были точки А, В, С, имеет место векторное равенство:

 

**Правило параллелограмма**. Если векторы  и  неколлинеарны, их можно отложить от одной точки, достроив затем параллелограмм. Диагональ параллелограмма есть сумма двух векторов  и .



В

**Вычитание векторов.**

А

С

$$\vec{АВ}-\vec{АС}=\vec{СВ}$$

**Координаты вектора.** Числа x, y и z называются **координатами вектора**  . В этом случае пишут:

Если точка А(x1; y1; z1) – координаты начала вектора

 В(x2; y2; z2) – координаты конца вектора, то координаты вектора $\vec{АВ}$ находят по формуле: $\vec{АВ}= \left\{х\_{2}-х\_{1}; y\_{2}-y\_{1}; z\_{2}-z\_{1}\right\}$ (т.е. от координат конца вычитаем координаты начала)

**Длина вектора:**

$\left|\vec{m}\right|= \sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$ **(1)** , где x; y; z – координаты вектора

$\left|\vec{АВ}\right|= \sqrt{(х\_{2}-х\_{1})^{2}+ (y\_{2}-y\_{1})^{2}+(z\_{2}-z\_{1})^{2}}$ **(2)**

**Действия над векторами, заданными своими координатами**



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Сложение** | **Вычитание** | **Умножение** |
| http://tvsh2004.narod.ru/img/vabc.gifhttp://tvsh2004.narod.ru/img/vc2.gif**(3)**При сложении векторов их соответстветственные координаты складываются. | http://tvsh2004.narod.ru/img/va-bc.gifhttp://tvsh2004.narod.ru/img/vc3.gifПри вычитании векторов их соответстветственные координаты вычитаются. | http://tvsh2004.narod.ru/img/va2.gifhttp://tvsh2004.narod.ru/img/va3.gifПри умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число. |

**2. Первичное закрепление нового материала. ВСЕ КРАСНЫМ ЦВЕТОМ ДЕЛАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО.**

**1)** Дан прямоугольный параллелепипед. Назовите сонаправленные векторы; противоположно направленные векторы.

C1

В1

В1

D1

А1

C

В

А

D

a) B1A1….C1D1

b) DD1….CC1

c) BA… DC

d) B1A1…DC

e) BB1…DD1

f) C1D1…DC

1. Найти координаты вектора

А) А(3; 4; -1) Б) С (1; 2; -4) В) E (-3;-2;5)

 В( -2; 0; 4) D (3; 2; 2) F (-5;7; 4)

$\vec{АВ}\left\{-2-3;0-4;4-(-1)\right\}$ $\vec{DC}\left\{1-3;2-2;-4-2\right\}$ $\vec{FE}\left\{…;…;…\right\}$

$\vec{АВ}\left\{-5;-4; 5\right\}$ $\vec{DC}\left\{-2;0;-6\right\}$

В) M (0; 2; -3) В) H (3; 4; -3)

 N (5; -7; 4) K (9; -7; 0)

$\vec{MN}\left\{…;…;…\right\}$ $\vec{HK}\left\{…;…;…\right\}$

1. Найдите длину вектора:

А) $\vec{a}${*7*;-5;4}

По формуле (1) : $\left|\vec{а}\right|= \sqrt{7^{2}+(-5)^{2}+4^{2}}$ = $\sqrt{49+25+16}= \sqrt{90}=\sqrt{9∙10}=3\sqrt{10}$

Б) $\vec{b}$ {0;3;-9}, B) $\vec{c}$ {-2;5;-8}

**4)** Найти длину вектора, если известны координаты начала и конца вектора:

А) M (0; 2; -3) и N(3; 4; -3) , $\left|\vec{MN}\right|$- ?

$$\left|\vec{MN}\right|= \sqrt{(3-0)^{2}+ (4-2)^{2}+(-3-(-3))^{2}}=\sqrt{3^{2}+2^{2}+0^{2}}=\sqrt{9+4+0}=\sqrt{13}$$

 Б) Е (5; -2; 4) и K (9; 2; 1) , $\left|\vec{КЕ}\right|$ - ?

 В) А(3; 4; 1) и С (1; 2; -3) , $\left|\vec{СА}\right|$ - ?

**Д-191. Математика\_ Разложение вектора по направлениям. Действия с векторами.**

|  |  |
| --- | --- |
| Для изучения новой темы понадобится определение компланарных векторов.Зададим в пространстве прямоугольную систему координат Охуz. На каждой из положительных осей отложим от начала координат единичный вектор, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через вектор | | = 1 на оси абсцисс| | = 1 на оси ординат $\left|\vec{k}\right|$ = 1 на оси аппликат.Эти векторы не компланарны, т.к. лежат в разных плоскостях.Поэтому любой вектор  можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде= х+y+z(вектор а равен: первая координата икс, умноженная на вектор и, плюс вторая координата игрек, умноженная на вектор джи, плюс третья координата зэт, умноженная на вектор ка), причем коэффициенты разложения х, у, z определяются единственным образом. Коэффициенты х, у и z в разложении вектора по координатным векторам называются координатами вектора  в данной системе координат.  {1; 0; 0}, {0; 1; 0}, {0; 0; 1}.Нулевой вектор можно представить в виде = 0+0+0то есть все координаты нулевого вектора равны кулю. Координаты равных векторов соответственно равны, т. е. если векторы  {х₁; у₁; z₁} и {х₂; у₂; z₂} равны, то х₁ = х₂, у₁ = у₂, z₁ = z₂. ***Правила, позволяющие по координатам данных векторов найти координаты их суммы, разности и произведения вектора на данное число.*** 1° Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если  {х₁; у₁; z₁} и {х₂; у₂; z₂} - данные векторы, то вектор  + имеет координаты {х₁ + х₂; у₁ + у₂; z₁ + z₂}. 2°. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если  {х₁; у₁; z₁} и {х₂; у₂; z₂} - данные векторы, то вектор  - имеет координаты {х₁ - х₂; у₁ - у₂; z₁- z₂}. 3°. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Другими словами, если  {х; у; z} - данный вектор, α - данное число, то вектор α имеет координаты {αх; αу; αz}. Рассмотренные правила позволяют находить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов, координаты которых известны. ***ПРИМЕР 7)***Дано.  {1; -2; 0}, {0; 3; -6}, {-2; 3; 1}Найти. = 2–  + 4 В этом примере три действия 1) умножение вектора на число, 2) вычитание, 3) сложение.САМОСТОЯТЕЛЬНО:***ПРИМЕР 8)***A) Даны координаты векторов:$$\vec{a} \left\{-6; -3;2\right\}$$$$\vec{b} \left\{0; 0;-4\right\}$$$$\vec{c} \left\{1; 1;-1\right\}$$$$\vec{t} \left\{0; 1;-2\right\}$$$$\vec{n} \left\{6;0;8\right\}$$$$\vec{m} \left\{7; 0;0\right\}$$Записать разложение векторов.Б) Дано разложение векторов: $$\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$$$$\vec{d}=\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$$$$\vec{b}=-5\vec{i}+7\vec{k}$$$$\vec{n}=-8\vec{k}$$$$\vec{m}=-5\vec{j}+\vec{k}$$$$\vec{c}=12\vec{j}$$Записать координаты векторов используя формулы | **Определение**. Векторы называются ***компланарными***, если при откладывании их из одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.Векторы,и  назовем координатными векторами.= х+y+z **(4)**Коэффициенты х, у и z в разложении вектора по координатным векторам называются координатами вектора  в данной системе координат.Обозначение: {х; у; z} **(5)****Поэтому вектор может иметь две записи из (4) в (5) и наоборот.*****ПРИМЕР 5)***Дано разложение векторов: , , , , , .Записать координаты векторов используя формулы (4-5).Решение{3; 2; –5}, {–5; 3; –1}, {1; –1; 0}, {0; 1; 1}, {–1; 0; 1}, {0; 0; 0,7}.***ПРИМЕР 6)***Даны координаты векторов:{0; -2; 0}, {5; -3; 1}, {2; 0; 0}, {0; -1; 1}, {-1; -2; 7}, {4; 0; 15}.Записать разложение векторовРешение= -2 = 5-3+ = 2 = -+ = --2+7 = 4+15 Решение.2 = 2{1; -2; 0} = {2; -4; 0} = $\frac{1}{3}$ {0; 3; -6} = {0; -1; 2}4 = 4 {-2; 3; 1} = {-8; 12; 4} = {-6; 9; 2}САМОСТОЯТЕЛЬНО:***ПРИМЕР 9) по вариантам.******ДЕЛАЕМ ТОЛЬКО СВОЙ ВАРИАНТ******1 вариант*** Найдите вектор $\vec{n}=\frac{1}{3}\vec{a}- 2 \vec{b}+4\vec{c}$,если $$\vec{a} \left\{-6;0;1,5\right\}, \vec{b}\left\{0,3; -1;2\right\}, \vec{c}\left\{0;1;-1,5\right\}$$***2 вариант***Найдите вектор $\vec{m}=3\vec{a}+ \frac{1}{4} \vec{b}- 2\vec{c}$,если $$\vec{a} \left\{-1;2;1,5\right\}, \vec{b}\left\{16; -16;4\right\}, \vec{c}\left\{0;1,4; -5\right\}$$ |