**Д-191. Математика\_ Векторы в пространстве.**

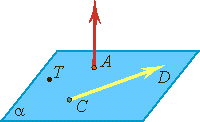
**Историческая справка**:

Впервые понятие вектора появилось в работах немецкого математика 19 века Г. Грассмана и ирландского математика У. Гамильтона; затем его использовали в своих открытиях многие ученые. Современная символика для обозначения вектора была введена в 1853 году французским математиком О. Коши. Применение векторов играет важнейшую роль в современной математике, химии, биологии, экономике и в других науках.

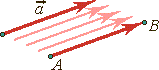
Вектором называется отрезок, у которого указано, какая точка является началом, а какая концом, т.е. вектор - это направленный отрезок.

1. Вектор характеризуется следующими элементами:  
   1) начальной точкой ;  
   2 )направлением;   
   3) длиной («модулем вектора»).

Если начало вектора — точка А, а его конец — точка В, то вектор обозначается http://tvsh2004.narod.ru/img/v2.gif или http://tvsh2004.narod.ru/img/va.gif.

 http://tvsh2004.narod.ru/img/10-26.gif

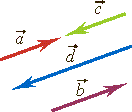
От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один, используя параллельный перенос.



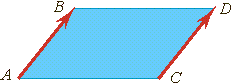
**Нулевой вектор** — точка в пространстве. Начало и конец нулевого вектора совпадают, и он не имеет длины и направления. Обозначается: http://tvsh2004.narod.ru/img/v3.gif или .

**Абсолютной величиной** (или модулем) **вектора** называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора http://tvsh2004.narod.ru/img/va.gif. Обозначается http://tvsh2004.narod.ru/img/v4.gif.

**Два ненулевых вектора** называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.  
Если векторы http://tvsh2004.narod.ru/img/va.gif и http://tvsh2004.narod.ru/img/vb.gif коллинеарны и их лучи сонаправлены, то **векторы** http://tvsh2004.narod.ru/img/va.gif и http://tvsh2004.narod.ru/img/vb.gif **называются сонаправленными**.  Обозначаются http://tvsh2004.narod.ru/img/v6.gif.  
Если векторы http://tvsh2004.narod.ru/img/va.gif и http://tvsh2004.narod.ru/img/vd.gif коллинеарны, а их лучи не являются сонаправленными, то **векторы** http://tvsh2004.narod.ru/img/va.gif и http://tvsh2004.narod.ru/img/vd.gif **называются противоположно направленными**.   
Обозначаются http://tvsh2004.narod.ru/img/v7.gif. **Нулевой вектор условились считать сонаправленным с любым вектором.**

 http://tvsh2004.narod.ru/img/v8.gif

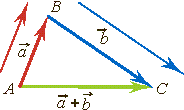
**Два вектора называются равными**, если они совмещаются параллельным переносом.

http://tvsh2004.narod.ru/img/v5.gif, если |AB|=|CD| и 

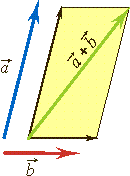
**Свойство коллинеарных векторов.** Если векторы http://tvsh2004.narod.ru/img/va.gif и http://tvsh2004.narod.ru/img/vb.gif коллинеарны и http://tvsh2004.narod.ru/img/10-30.gif, то существует число *k* такое, что http://tvsh2004.narod.ru/img/10-31.gif. причем если *k* > 0, то векторы http://tvsh2004.narod.ru/img/va.gif и http://tvsh2004.narod.ru/img/vb.gif сонаправленные, если *k* < 0, то противоположно направленные.

**Сложение векторов**

**Правило треугольника**. Каковы бы ни были точки А, В, С, имеет место векторное равенство:

http://tvsh2004.narod.ru/img/10-33.gif 

**Правило параллелограмма**. Если векторы http://tvsh2004.narod.ru/img/va.gif и http://tvsh2004.narod.ru/img/vb.gif неколлинеарны, их можно отложить от одной точки, достроив затем параллелограмм. Диагональ параллелограмма есть сумма двух векторов http://tvsh2004.narod.ru/img/va.gif и http://tvsh2004.narod.ru/img/vb.gif.



В

**Вычитание векторов.**

А

С

**Координаты вектора.** Числа x, y и z называются **координатами вектора** http://tvsh2004.narod.ru/img/vm.gif . В этом случае пишут:http://tvsh2004.narod.ru/img/vm3.gif

Если точка А(x1; y1; z1) – координаты начала вектора

В(x2; y2; z2) – координаты конца вектора, то координаты вектора находят по формуле: (т.е. от координат конца вычитаем координаты начала)

**Длина вектора:**

**(1)** , где x; y; z – координаты вектора

**(2)**

**Действия над векторами, заданными своими координатами**

http://tvsh2004.narod.ru/img/vab.gif

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Сложение** | **Вычитание** | **Умножение** |
| http://tvsh2004.narod.ru/img/vabc.gif http://tvsh2004.narod.ru/img/vc2.gif  **(3)**  При сложении векторов их соответстветственные координаты  складываются. | http://tvsh2004.narod.ru/img/va-bc.gif http://tvsh2004.narod.ru/img/vc3.gif  При вычитании векторов их соответстветственные координаты  вычитаются. | http://tvsh2004.narod.ru/img/va2.gif http://tvsh2004.narod.ru/img/va3.gif  При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число. |

**2. Первичное закрепление нового материала. ВСЕ КРАСНЫМ ЦВЕТОМ ДЕЛАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО.**

**1)** Дан прямоугольный параллелепипед. Назовите сонаправленные векторы; противоположно направленные векторы.

C1

В1

В1

D1

А1

C

В

А

D

a) B1A1….C1D1

b) DD1….CC1

c) BA… DC

d) B1A1…DC

e) BB1…DD1

f) C1D1…DC

1. Найти координаты вектора

А) А(3; 4; -1) Б) С (1; 2; -4) В) E (-3;-2;5)

В( -2; 0; 4) D (3; 2; 2) F (-5;7; 4)

В) M (0; 2; -3) В) H (3; 4; -3)

N (5; -7; 4) K (9; -7; 0)

1. Найдите длину вектора:

А) {*7*;-5;4}

По формуле (1) : =

Б) {0;3;-9}, B) {-2;5;-8}

**4)** Найти длину вектора, если известны координаты начала и конца вектора:

А) M (0; 2; -3) и N(3; 4; -3) , - ?

Б) Е (5; -2; 4) и K (9; 2; 1) , - ?

В) А(3; 4; 1) и С (1; 2; -3) , - ?

**Д-191. Математика\_ Разложение вектора по направлениям. Действия с векторами.**

|  |  |
| --- | --- |
| Для изучения новой темы понадобится определение компланарных векторов.  Зададим в пространстве прямоугольную систему координат Охуz. На каждой из положительных осей отложим от начала координат единичный вектор, т. е. вектор, длина которого равна единице.  Обозначим через вектор  | | = 1 на оси абсцисс  | | = 1 на оси ординат  = 1 на оси аппликат.  Эти векторы не компланарны, т.к. лежат в разных плоскостях.  Поэтому любой вектор  можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде  = х+y+z  (вектор а равен: первая координата икс, умноженная на вектор и, плюс вторая координата игрек, умноженная на вектор джи, плюс третья координата зэт, умноженная на вектор ка), причем коэффициенты разложения х, у, z определяются единственным образом.  Коэффициенты х, у и z в разложении вектора по координатным векторам называются координатами вектора  в данной системе координат.  {1; 0; 0},  {0; 1; 0},  {0; 0; 1}.  Нулевой вектор можно представить в виде = 0+0+0  то есть все координаты нулевого вектора равны кулю.  Координаты равных векторов соответственно равны, т. е. если векторы  {х₁; у₁; z₁} и {х₂; у₂; z₂} равны,  то х₁ = х₂, у₁ = у₂, z₁ = z₂.  ***Правила, позволяющие по координатам данных векторов найти координаты их суммы, разности и произведения вектора на данное число.***  1° Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.  Другими словами, если  {х₁; у₁; z₁} и  {х₂; у₂; z₂} - данные векторы, то вектор  + имеет координаты  {х₁ + х₂; у₁ + у₂; z₁ + z₂}.  2°. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.  Другими словами, если  {х₁; у₁; z₁} и  {х₂; у₂; z₂} - данные векторы, то вектор  - имеет координаты  {х₁ - х₂; у₁ - у₂; z₁- z₂}.  3°. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.  Другими словами, если  {х; у; z} - данный вектор, α - данное число, то вектор α имеет координаты {αх; αу; αz}.  Рассмотренные правила позволяют находить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов, координаты которых известны.  ***ПРИМЕР 7)***  Дано.  {1; -2; 0}, {0; 3; -6}, {-2; 3; 1}  Найти. = 2–  + 4  В этом примере три действия  1) умножение вектора на число,  2) вычитание, 3) сложение.  САМОСТОЯТЕЛЬНО:  ***ПРИМЕР 8)***  A) Даны координаты векторов:  Записать разложение векторов.  Б) Дано разложение векторов:  Записать координаты векторов используя формулы | **Определение**. Векторы называются ***компланарными***, если при откладывании их из одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.    Векторы,и  назовем координатными векторами.    = х+y+z **(4)**  Коэффициенты х, у и z в разложении вектора по координатным векторам называются координатами вектора  в данной системе координат.  Обозначение: {х; у; z} **(5)**  **Поэтому вектор может иметь две записи из (4) в (5) и наоборот.**  ***ПРИМЕР 5)***  Дано разложение векторов:  ,  ,  ,  ,  ,  .  Записать координаты векторов используя формулы (4-5).  Решение  {3; 2; –5},  {–5; 3; –1},  {1; –1; 0},  {0; 1; 1},  {–1; 0; 1},  {0; 0; 0,7}.  ***ПРИМЕР 6)***  Даны координаты векторов:  {0; -2; 0},  {5; -3; 1},  {2; 0; 0},  {0; -1; 1},  {-1; -2; 7},  {4; 0; 15}.  Записать разложение векторов  Решение  = -2  = 5-3+  = 2  = -+  = --2+7  = 4+15  Решение.  2 = 2{1; -2; 0} = {2; -4; 0}  = {0; 3; -6} = {0; -1; 2}  4 = 4 {-2; 3; 1} = {-8; 12; 4}  = {-6; 9; 2}  САМОСТОЯТЕЛЬНО:  ***ПРИМЕР 9) по вариантам.***  ***ДЕЛАЕМ ТОЛЬКО СВОЙ ВАРИАНТ***  ***1 вариант***  Найдите вектор  ,если  ***2 вариант***  Найдите вектор  ,если |