|  |
| --- |
| **Д-191.Математика\_ «Равносильность уравнений и неравенств, систем. Основные приемы решения»** |
| ***Определение 1.***Два уравнения с одной переменной f(х) = *g(х)* и *р(х) = h(х)*  называют равносильными, если множества их корней совпадают. |
| Пример 1  Выяснить, являются ли уравнения  х2-1=0 и х-1=0 равносильными?  Решение.  Вычислим корни уравнения х2-1=0;  х1=1; х2= -1.  Вычислим корни уравнения х-1=0;  х=1  Уравнения х2-1=0 и х-1=0 не являются равносильными. |
| Пример 2.  Выяснить, являются ли уравнения х2-9=0 и (х+3)( 2х-8)=0 равносильными?  Решение.  Уравнения х2-9=0 и (х+3)( 2х-8)=0 являются равносильными, т.к. уравнение х2-9=0 имеет два корня: х1=3; х2= -3.Уравнение  (х+3)( 2х-8)=0 имеет то же два корня: х1=3; х2= -3. |
| Пример 3.  Выяснить, являются ли уравнения х2+3=0 и =0 равносильными?  Решение.  Уравнения х2+3=0 и =0 являются равносильными, т.к. уравнение х2+3=0 не имеет корней. Уравнение =0 то же не имеет корней. |
| **вывод**:  ***если два уравнения имеют одинаковые корни или не имеют корней, то такие уравнения – равносильные.*** |
| ***Определение 2****.* Если каждый корень уравнения  *f(x) = g(х) (1)*  является в то же время корнем уравнения  *р(х) = h(х),* (2)  то уравнение (2) называют следствием уравнения (1). |
| Пример 4.  Выяснить, какое из уравнений х-2=0 и  х2-5х+6=0 является следствием другого?  Решение.  Обозначим уравнение х-2=0 – (1), а уравнение х2-5х+6=0 –(2).  Уравнение (1) имеет единственный корень,х=2.  Уравнение (2) имеет два корня х1=2; х2= 3.  Уравнение (2) является следствием уравнения (1). |
| Пример 5.  Выяснить, какое из уравнений х2-4х+3=0 и х2-5х+6=0 является следствием другого?  Решение.  Обозначим уравнение х2-4х+3=0 - (1), а уравнение х2-5х+6=0 –(2)  Уравнение (1)имеет два корня х1=1; х2= 3.  Уравнение –(2)  имеет два корня х1=2; х2= 3.  Оба уравнения имеют только по одному общему корню. Согласно определению, ни одно из них не является следствием другого. |
| **Запомни: *если каждое из двух уравнений является следствием другого, то такие два уравнения равносильны.*** |
| Решение любых уравнений происходит в 3 этапа:  ***первый этап- технический***.  ***Второй этап- анализ решения***.  ***Третий этап – проверка***. |
| При решении уравнений используются ***6 теорем равносильности***. |
| ***Теорема 1***. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному уравнению.  Например, если в уравнении х5+3х2 -7=4х+10 перенести слагаемые 4х и –7 из одной части в другую, то получим уравнение х5+3х2-4х=17 равносильное данному уравнению. |
| ***Теорема*** *2.* Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному уравнению. |
| ***Теорема*** *3*. Показательное уравнение  аf(x) = аg(x) (где а > 0, a≠1) равносильно уравнению f(x) = g(х).  Например, показательное уравнение  =42х+1 равносильно уравнению =2х+1. |
| теоремы 1-3 называются **«спокойными».** Их применение гарантирует равносильность преобразований без дополнительных условий. |
| теоремы 4-6 называются **«беспокойными».** Их применение возможно при выполнении определенных условий. |
| ***Определение 3.*** Областью определения уравнения **f(х) = g(х)** или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называ­ют множество тех значений переменной **х,** при которых одновре­менно имеют смысл выражения  **f(х)** и **g(х).** |
| ***Теорема 4***. Если обе части уравнения  f(x) = g(х) умножить на одно и то же выражение h(х), которое:  1)имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения  f(x) = g(х)  2)нигде в этой области не обращается в 0,то получится уравнение f(x)h(x) = g(x)h(x), равносильное данному в его ОДЗ. |
| Пример 6.  Выяснить будут ли уравнения  и=2х-7равносильны?  Решение.  ОДЗ уравнения  задается условиями 2х-1≥0 и х+3≠0. Получаем, х≥ 0,5.  Выражение h(х)=х+3 в этой области имеет смысл и нигде не обращается в нуль.  Поэтому умножая обе части уранения умножаем на х+3.  Уравнение =2х-7 равносильно уравнению . |
| ***Теорема 5***. Если обе части уравнения  f(x) = g(х) неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение (f(x))n=(g(x))n равносильное данному в его ОДЗ. |
| Пример7.  Решить уравнение  Решение.  ОДЗ задается неравенством  6х -11≥0, х≥  В этой ОДЗ обе части уравнения неотрицательны. Возведем в квадрат обе части уравнения и получим, согласно теоремы 5, равносильное квадратное уравнение: 6х - 11=(х-1)2 или  0= х2-8х +12. Корни х1=6 и х2= 2 также будут корнями исходного уравнения |
| ***Теорема 6***. Пусть а>0 , a≠1,и f(х) > О,  g(х) > 0 ,, тологарифмическое уравнение loga f(x) = loga g(x) равносильно уравнению f(x) = g(х) |
| Пример8.  Решить уравнение  log7 (3х2+2) = log7 (4│х│+1).  Решение.  В логарифмическом уравнении log7 (3х2+2) = log7 (4│х│+1) функции *f(х)=* 3х2+2 и *g(х)=* 4│х│+1 принимают положительные значения при всех значениях переменной х. По тереме 6 данное уравнение равносильно уравнению 3х2+2=4│х│+1.Корни х1;2=±1 и  х3;4=± этого уравнения являются корнями исходного уравнения. |
| * Если при решении уравнения использовались равносильные преобразования, то проверка не требуется. * При проверке корней уравнения очень часто используют ОДЗ. * Если по ОДЗ проверку сделать трудно, то выполняют ее подстановкой в исходное уравнение. |
| Пример 1.  Решить уравнение http://kontromat.ru/irur/image025.gif  Решение.  ОДЗ уравнения определяется системой неравенств:  http://kontromat.ru/irur/image027.gif  Возведем обе части уравнения в квадрат,получим:  http://kontromat.ru/irur/image033.gif  Проверка.  Значение х1= является корнем уравнения, т.к. оно входит в ОДЗ, http://kontromat.ru/irur/image037.gif Значение х2= - не является корнем уравнения, т.к. оно не входит в ОДЗ, т.е. http://kontromat.ru/irur/image041.gif  Проверим корень х= , подставим его в исходное равенство:  http://kontromat.ru/irur/image043.gif  http://kontromat.ru/irur/image045.gif  http://kontromat.ru/irur/image045.gif  Получим http://kontromat.ru/irur/image047.gif - равенство верное, значит, х= - корень уравнения.  Ответ: . |
| **Равносильность неравенств**  Значение переменной х, при котором данное неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство называется решением неравенства f(х)>g(х).  Иногда его называют частным решением.  Множество всех частных решений дает нам общее решение. Но чаще этот термин опускают и говорят просто решение. |
| **Определение1**.  Два неравенства с одной переменной f(х)>g(х) и p(х)>h(х) называются равносильными, если их решения совпадают.  Например.  Неравенства х>1 и х3>1 являются равносильными на множестве всех действительных чисел, поэтому говорят, что они равносильны. |
| **Определение 2.**  Если решение неравенства f(х)>g(х) (1)  содержится в решении неравенства p(х)>h(х) (2), то неравенство (2) называют следствием неравенства (1).  Например.  Решением неравенства х-3>0 является открытый числовой луч (3;+∞).  Решением неравенства log3(х-3)<1является интервал (3;6).  Неравенство х-3>0 является следствием неравенства log3(х-3)<1. |
| Запомните! При решении неравенств необходимо выполнять только равносильные преобразования. При этом используются шесть теорем равносильности неравенств. |
| **Теорема 1.**  Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, сохранив знак неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.  Например.  Неравенство х2 -7≥ 9х равносильно неравенству х2 -9х-7≥0. Так каквыполнили равносильное преобразование. |
| **Теорема 2.**  Если обе части неравенства возвести в одну и туже нечетную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному неравенству.  Например, неравенство  равносильно неравенству 2х-7≥8+х (обе части возвели в нечетную (пятую) степень). |
| **Теорема 3.**  Показательное неравенство af(х)>аg(х) равносильно:  1)неравенству того же смысла f(х)>g(х), если а>1;  2) неравенству противоположного смысла f(х)<g(х), если 0<а<1;  Пример1.  Неравенство 52х> 5х+3равносильно неравенству 2х>х+3,т.к. а=5>1.  Пример2.  Неравенство 0,52х> 0,5х+3равносильно неравенству 2х<х+3,т.к. 0<а=0,5<1. |
| **Теорема 4.**  1)Если обе части неравенства f(х)>g(х) умножить на одно и то же выражение h(х),положительное при всех х из области определения( области допустимых значений переменной) неравенства f(х)>g(х), оставив при этом знак неравенства без изменения , то получится неравенство f(х) h(х)>g(х) h(х), равносильное данному.  2) Если обе части неравенства f(х)>g(х) умножить на одно и то же выражение h(х),отрицательное при всех х из области определения( области допустимых значений переменной) неравенства f(х)>g(х), изменив при этом знак неравенства на противоположный , то получится неравенство f(х)h(х)<g(х)h(х), равносильное данному.  Рассмотрим примеры.  Пример1.  Неравенство  равносильно неравенству 3х+5>х-3(обе части умножили на выражение √х2+2, положительное при всех значениях х.)  Пример 2.  Неравенство равносильно неравенству 3х+5≥х-3(обе части умножили на выражение log0,4(х2+1) отрицательное при всех значениях х, и изменили при этом знак неравенства). |
| **Теорема 5.**  Если обе части неравенства f(х)>g(х) неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения в одну и ту же четную степень n, получится неравенство того же смысла f(х)n >g(х)n, равносильное данному неравенству.  Например.  Обе части неравенства  │х-4│>│х+6│неотрицательны для любых х. Возведем их в квадрат. Получим неравенство (х-4)2>( х+6)2равносильное данному. Множество его решений интервал(-∞;-1) является и решением данного неравенства. |
| **Теорема 6.**  Если f(х)>0 и g(х) >0, то логарифмическое неравенство logаf(х) > logа g(х) равносильно:  1) неравенству того же смысла f(х)>g(х). если а>1;  2) неравенству противоположного смысла  f(х)<g(х), если 0<а<1  Рассмотрим примеры.  Пример 1.  Неравенство log4(3х-6) > log4(2х+4) в его ОДЗ(х>2) равносильно неравенству  3х-6>2х+4, т.к. а=4>1.  Пример 2.  Неравенство log0,4(3х-6) > log0,4(2х+4) в его ОДЗ(х>2) равносильно неравенству  3х-6<2х+4, т.к. 0<а=0,4<1. |